7.1.1 Kartézské soustavy souřadnic I

Předpoklady:

Z historie matematiky
Po krachu Pythagorejců s druhou odmocninou se řečtí matematici soustředili na geometrii $\Rightarrow$ geometrie byla nejrozvinutější částí starověké matematiky:

- první matematická učebnice (Euklidovy základy) se týkala geometrie,
- v geometrii bylo možné vyjádřit odmocniny,
- to, co se učíme na gymnáziu z geometrie, zdaleka nepokrývá to, co Řekové objevili, zatímco o jiných částech matematiky, které se na gymnáziu dnes učí, nic nevěděli,

$\Rightarrow$ ještě na začátku sedmnáctého století byla geometrie královskou disciplínou matematiky.

René Descartes (odtud název souřadnic kartézské)
Analytická geometrie: body v rovině (nebo v prostoru) popíšeme pomocí souřadnic (uspořádané *n*-tice čísel), pro každý geometrický útvar najdeme rovnici (nerovnici), body, které této rovnici (nerovnici) vyhovují, jsou body daného geometrického útvaru,
$\Rightarrow$ hledání průsečíků = řešení soustav rovnic (nerovnic),
$\Rightarrow$ geometrie se změní z kreslení na počítání.
Ve své knize Geometrie Descartes podává pomocí analytického přístupu obecné řešení Pappovy úlohy (hledání kružnice, která se dotýká kružnice nebo přímky v zadaném bodě), kterou Řekové uměli řešit pouze pro dvě přímky $\Rightarrow$

- konec geometrie jako královské disciplíny,
- novověká matematika překonává starověkou.

O něco později: Tři klasické problémy antické matematiky (zdvojení krychle, trisekce úhlu, kvadratura kruhu) se nikdy nepovedlo vyřešit.
Pomocí analytické geometrie je možné snadno dokázat, že tyto úlohy jsou neřešitelné
$\Rightarrow$ definitivní potvrzení „nadřazenosti", algebry nad geometrií.

Princip všech těchto důkazů je velmi podobný. Každá klasická konstrukce odpovídá řešení rovnice nebo soustavy rovnic, například:

- přímky jsou reprezentovány lineární rovnicí se dvěma neznámými $\Rightarrow$ průsečíku dvou přímek odpovídá v analytické geometrii řešení soustavy dvou rovnic,
- kružnice je reprezentována kvadratickou rovnicí se dvěma neznámými $\Rightarrow$ průsečíku kružnice s přímkou odpovídá řešení soustavy rovnice kvadratické a lineární,

$\Rightarrow$ klasické konstrukce pomocí kružítka a pravítka tedy odpovídají řešení soustav lineárních a kvadratický rovnic s racionálními koeficienty.
Pře řešení kvadratury kruhu hledáme stranu čtverce, který by měl stejný obsah jako kružnice o poloměru $r \Rightarrow a^2 = \pi r^2 \Rightarrow a = \sqrt{\pi} \cdot r$, číslo $\sqrt{\pi}$ však nemůže být řešením žádné soustavy lineárních a kvadratický rovnic s racionálními koeficienty $\Rightarrow$ kvadratura kruhu pomocí pravítka kružítka je neřešitelná.

Analytická geometrie dnes:

Souřadnice na přímce
Číselná osa:

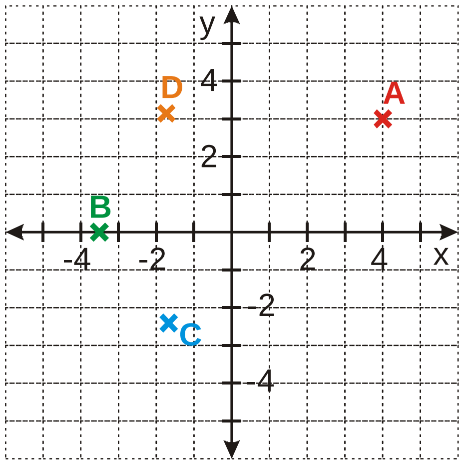
- máme přímku *p*,
- zvolíme bod *O* (počátek),
- zvolíme bod *I* tak, aby $|OI| = 1$,
- každému bodu *X* přímky *p* přiřadíme reálné číslo $x = |OX|$, leží-li bod *X* na polopřímce *OI*, a číslo $x = -|OX|$, leží-li bod *X* na polopřímce opačné k polopřímce *OI*.

Souřadnice v rovině

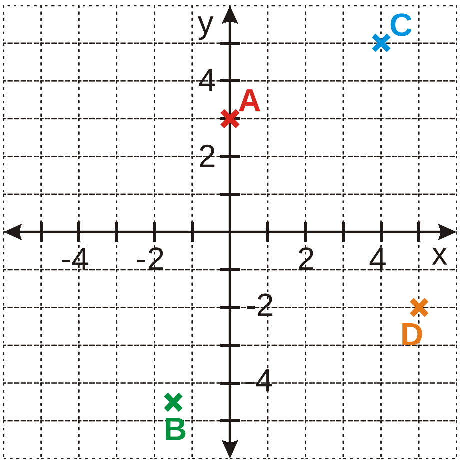
Kartézskou soustavou souřadnic v rovině nazýváme dvojici číselných os *x*, *y* v rovině, pro které platí:
1. obě osy jsou navzájem kolmé,
2. jejich průsečíku *O* odpovídá na obou osách číslo 0.

Terminologie:
- bod *O* – počátek kartézské soustavy souřadnic,
- přímky *x*, *y* – souřadné osy.

Př. 1: Do kartézské soustavy souřadnic *Oxy* zobraz body $A[4;3]$, $B[-3{,}5;0]$, $C\left[-\frac{5}{3};-2{,}4\right]$, $D\left[-\sqrt{3};\pi\right]$.



Př. 2: Urči souřadnice bodů na obrázku:



Souřadnice zakreslených bodů:

$A[0;3]$ $B[-1,5;-4,5]$ $C[4;5]$ $D[5;-2]$

Pokud nebude řečeno jinak, nebudeme v analytické geometrii pod pokynem sestroj rozumět rýsování na papír, ale nalezení souřadnic hledaných bodů výpočtem.

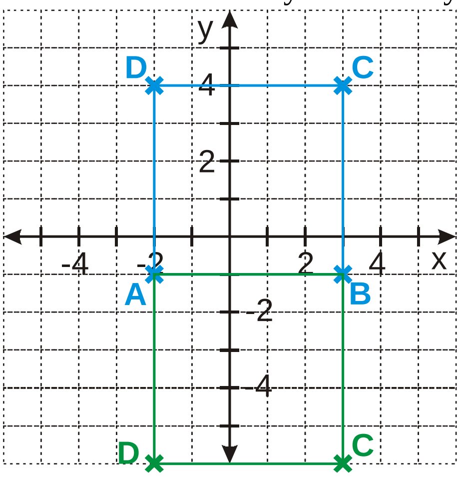
Pedagogická poznámka: Pokud má někdo z žáků problémy s předchozími příklady, je nezbytně nutné, aby si zopakovat základy kreslení grafů a kartézské soustavy.

Pedagogická poznámka: Přes předchozí poznámku mají někteří studenti tendenci v následujících příkladech rýsovat a nepočítat.

Pedagogická poznámka: Vlastně pro celou analytickou geometrii platí, že je na jednu stranu potřeba, aby si studenti kreslili náčrtky, které jim dají představu o situaci, kterou počítají. Na druhou stranu je třeba bránit tomu, aby kreslením zbytečně přesných obrázků (v tomto případě například číslování os podle pravítka až do deseti) ztratili příliš mnoho času.

Př. 3: Sestroj čtverec *ABCD*, jsou-li dány body $A[-2;-1]$, $B[3;-1]$.

Zakreslíme si oba body do soustavy souřadnic a dokreslíme si hledaný čtverec.



Z obrázku je zřejmé, že existují dvě řešení a strana čtverce má délku 5. $\Rightarrow$

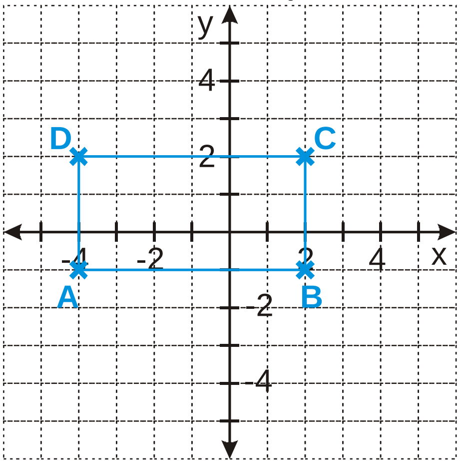
$C_1[3;-1+5] \Rightarrow C_1[3;4]$ $\qquad$ $D_1[-2;-1+5] \Rightarrow D_1[-2;4]$

$C_2[3;-1-5] \Rightarrow C_2[3;-6]$ $\qquad$ $D_2[-2;-1-5] \Rightarrow D_2[-2;-6]$

Pedagogická poznámka: Část studentů zapomene na spodní zelený čtverec. Stačí upozornit, že jim něco chybí.

Př. 4: V obdélníku *ABCD* platí: $a = 6$, $b = 3$. Urči souřadnice jeho vrcholů, pokud platí: $B[2;-1]$, strana *AB* je rovnoběžná s osou *x*, strana *BC* je rovnoběžná s osou *y*, *x*-ová souřadnice bodu *A* je záporná a *y*-ová souřadnice bodu *C* je kladná.

Zakreslíme do soustavy souřadnic bod *B* a celý obdélník *ABCD*:



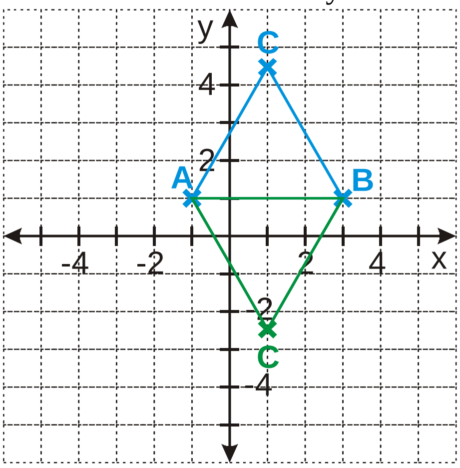
Z obrázku je zřejmé, že platí:

$A[2-6;-1] \Rightarrow A[-4;-1]$, $\quad C[2;-1+3] \Rightarrow C[2;2]$, $\quad D[-4;-1+3] \Rightarrow D[-4;2]$.

Pedagogická poznámka: Po zkušenostech s předchozím příkladem někteří studenti nezkontrolují platnost všech podmínek a kreslí obdélníků víc. Opět stačí upozornit na zadání.

Př. 5: Sestroj rovnostranný trojúhelník *ABC*. Jsou dány body $A[-1;1]$, $B[3;1]$.

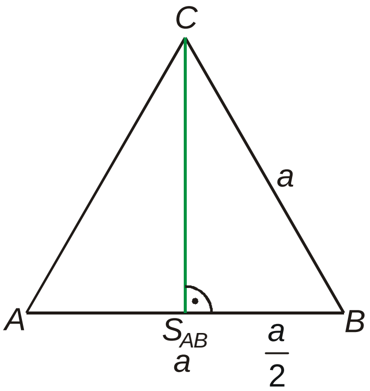
Zakreslíme si zadané body do soustavy souřadnic.



Zbývající vrchol trojúhelníka budeme hledat pomocí výšky na stranu *AB* $\Rightarrow$

- *x*-ová souřadnice se rovná 1 (stejná jako souřadnice středu úsečky *AB*),

- y-ová souřadnice se liší od souřadnic bodů A, B o velikost výšky.



Délku výšky $S_{AB}C$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}BC$:

$$\left|S_{AB}C\right|^2 = \left|BC\right|^2 - \left|S_{AB}B\right|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left|S_{AB}C\right|^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\left|S_{AB}C\right| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Výška trojúhelníka: $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.

$C_1\left[1;1+2\sqrt{3}\right]$ $\qquad$ $C_2\left[1;1-2\sqrt{3}\right]$

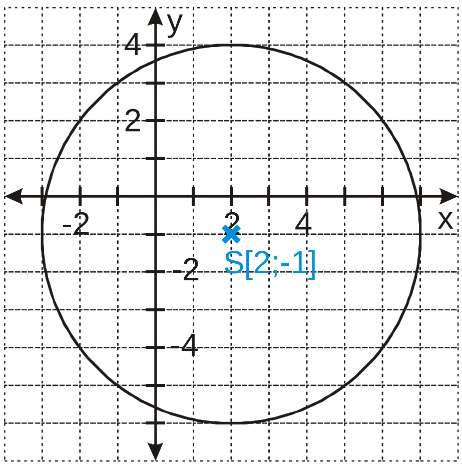
Pedagogická poznámka: Obrázek nakreslí všichni, stejně tak nemají studenti problémy s určením x-ové souřadnice bodů C_1, C_2 , ale určení y-ové souřadnice není tak snadné. Poměrně často se objevuje výsledek $C_1[1;5]$ s tím, že strana trojúhelníka je 4. Stačí, aby si studenti napsali ke stranám trojúhelníka jejich délky.

Př. 6: V kartézské soustavě souřadnic je dán bod $S[2;-1]$, která je středem kružnice $k(S;5)$.

a) Najdi všechny body s celočíselnými souřadnicemi, které leží na kružnici k.

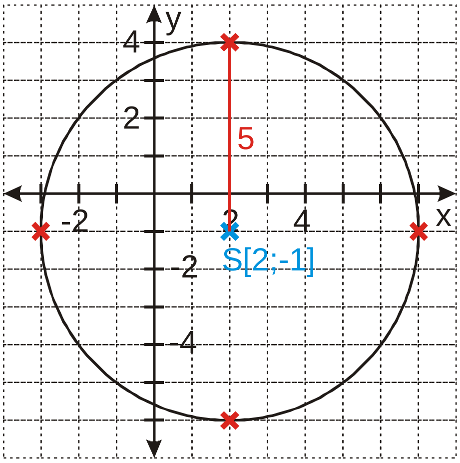
b) Urči druhou souřadnici následujících bodů $A[4;\, y]$ a $B[x;-2]$, které leží na kružnici k.

Načrtneme střed kružnice i kružnici samotnou do soustavy souřadnic.

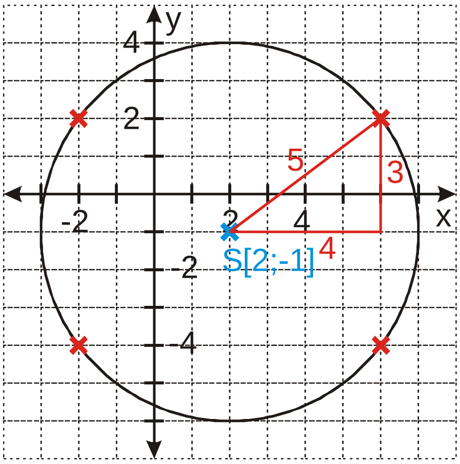


Celočíselné souřadnice budou mít čtyři body, které získáme, když se ze středu kružnice posuneme:

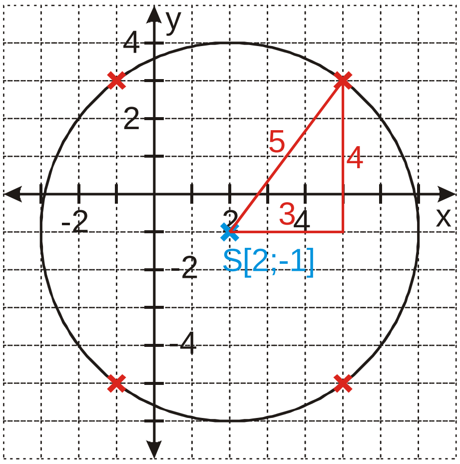
- o vzdálenost 5 ve směru souřadnicových os $\Rightarrow$ body: $[2;4];[2;-6];[-3;-1];[7;-1]$,



- o vzdálenost 4 ve směru osy x a vzdálenost 3 ve směru osy y (tato dvě posunutí tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 5) $\Rightarrow$ body $[6;2];[6;-4];[-2;2];[-2;-4]$,



- o vzdálenost 3 ve směru osy x a vzdálenost 4 ve směru osy y (tato dvě posunutí tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 5) $\Rightarrow$ body $[5;3];[5;-5];[-1;3];[-1;-5]$.



Hledáme druhou souřadnici bodu $A[4;y]$. Ve vodorovném směru je od bodu $S[2;-1]$, vzdálen o 2 $\Rightarrow$ pomocí Pythagorovy věty hledáme o kolik se jeho souřadnice od souřadnice středu liší ve směru y.

$2^2 + a^2 = 5^2$

$a = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$\Rightarrow$ body $A_1\left[4; -1+\sqrt{21}\right]$ a $A_2\left[4; -1-\sqrt{21}\right]$.

Hledáme druhou souřadnici bodu $B[x; -2]$. Ve svislém směru je od bodu $S[2; -1]$, vzdálen o 1 $\Rightarrow$ pomocí Pythagorovy věty hledáme o kolik se jeho souřadnice od souřadnice středu liší ve směru *x*.

$b^2 + 1^2 = 5^2$

$b = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{25-1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ body $B_1\left[2-2\sqrt{6}; -2\right]$ a $B_2\left[2+2\sqrt{6}; -2\right]$.

Shrnutí: V analytické geometrii popisujeme body pomocí jejich kartézských souřadnic.